Bizonyítás:

Belátjuk hogy $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ felső határfüggvény a $f(x)$ primitív függvénye azaz $\frac{d\Phi(x)}{dx} = f(x)$

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \xi \to x}} f(\xi) = f(x)$$

$$x \le \xi \le x + \Delta x \qquad \Delta x \to 0$$

$$\xi \to x$$

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$F(x) = \Phi(x) + C \qquad F(a) = \Phi(a) + C = C$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) = F(b) - C = F(b) - F(a)$$

A GYURI MATEMATIKÁJA

jegyzet arról, amit az egyetemen már nincs idő megérteni: sorozatok, függvények, differenciál és integrálszámítás

TARTALOM JEGYZÉK

Bevezető történet……I.

Kis előzetes algebra……1

Sorozatok, nullsorozatok……3

műveletek nullsorozaatokkal……5

Függvények……10

függvény határértéke……16

folytonos függvények……20

A differenciálhányados……22

Függvények differenciálhányadosa……25

Szélsőérték számítás……33

Út a mechanikához……35

Az integrálszámítás alapjai……38

integrálási szabályok……39

A határozott integrál……41

A Newton-Leibnitz formula……44

BEVEZETŐ TÖRTÉNET

Nem füllött a fogam hozzá, de harmadikos gimnazista koromban (1961) kénytelen voltam a gimnáziumi KISZ szervezetbe jelentkezni, hiszen egyetemre pályáztam – és akkor ez a felvétel érdekében erősen ajánlott volt.

Hasonlóan illett építőtáborban is részt venni, amit szintén teljesítettem még abban az évben.

A dolog politikai oldala rendben lett volna, de mégis a felvételin kérdezgetik az embert, meg pontozzák is, akkoriban persze titokban.

Nem volt vitás, hogy egyetemet kell végezzek, mert a mi családunkban ez már hagyomány volt. Az orvosi pálya már foglalt volt a bátyám révén, így nekem apám nagy álmát, a műszaki egyetemet kellett választanom – ezt szívesen megtettem, mert jó voltam matekból, fizikából és vágtam az ábrázolót is.

Apám, aki ritkán foglakozott a tanulmányaimmal, most ráhibázott, mert megbízta a bátyám volt gimnáziumi osztálytársát, a Gyurit, aki akkor már fizikaszakos egyetemista volt, hogy ugyan vegye már át velem a felvételi példákat.

Gyuri arról volt nevezetes, hogy nemcsak az országos matematika tanulmányi versenyeken nyert, hanem a nemzetközi porondon is bizonyított. Nagypolgári családból származott, így a korszellem értelmében, abban a rendszerben édesanyja diplomával csak takaríthatott, őt magát pedig soha nem vették volna fel az egyetemre, de hát a tanulmányi versenyek biztosították a csontnélküli bejutást.

A házukat szintén a korszellem értelmében elvették, államosították, lakókat költöztettek mellékjük, így gondos gazda híján a ház lerobbant lett és az elsőtanórát a kertben, térdig érő fűben tartottuk meg. Gyuri első kérdése az volt, hogy ki tanít engem matematikára a gimnáziumban – ő is ugyanoda járt, úgyhogy elég volt annyit mondanom, hogy a Szinusz tanár úr.

A Gyuri szerint a Szinusz jó tanár, majd megtanít engem mindenre, ami csak kell a felvételihez. Ezzel a téma le volt zárva, mert neki más javaslata volt: mégpedig az, hogy vegyek elő egy füzetet, ő majd mondja, én pedig szórólszóra írjam le, amit hallok.

Az volt a véleménye, hogy már az első egyetemi előadásokon olyan alapvetően fontos dolgokat adnak le, amit akkor és ott nincs elég idő mélyen átérteni, megemészteni.

Ezért ő minden foglalkozásunk alkalmával sétálgatva tollba mondta nekem ezt a kis jegyzetet, amit én az öreg füzetből átmásoltam ide, a leendő hallgatók és érdeklődő tanulók örömére. Én magam nagy hasznát vettem, mert betekintést nyertem a matematika módszerébe, nyelvezetébe ezért mindig volt egy biztos kapaszkodóm, mert legalább néhány alapvető fogalmat megismertem.

Gyuri később elhagyta az országot, Amerikában lett sikeres atomfizikus, ma már természetesen idős nyugdíjas. Talán azért történt így, mert a szívatás folytatódott, éjszakánként kapott gépidőt a Statisztikai Hivatalban, oda járt fel Debrecenből.

Valószínű, hogy a matematika nem tételek és bizonyítások sorozata, hanem valami egységes teljes rendszer – de mi csak ezeken keresztül tudunk fokról-fokra közelebb kerülni hozzá. Egy olyan tudomány, ami elvont, soha nem létezett fogalmakkal dolgozik abszolút precízséggel, gondolom, soha nem tudunk kijelölni egy pontot a számegyenesen, mert a pontnak nincs kiterjedése, az egyenes pedig végtelenül keskeny – mégis mindenki kijelöl pontokat a való életben, stb. mert agyunk képes rá, hogy megtalálja az utat az elvonttól a kézzelfogható valósághoz.

Sok sikert kívánok a leendő hallgatóknak, forgassák olyan szeretettel e jegyzetet, ahogy én csaknem hatvan év távlatából átadom, tudom, hogy vannak hibák, káosz a görög betűk tekintetében, stb. de mégis gondolatokat ébreszt, és talán hasznos előtanulmány lehet.

Ruzicska Rajmund

Kis előzetes:
Alapvető definíciók, tételek, axiómák az egyenlőtlenségekkel való számoláshoz.

① Def. Egy szám abszolutértékének nevezzük:
ha a szám pozitív akkor magát a számot,
ha 0 akkor a nullát
ha a szám negatív, akkor a szám ellentettjét.

röviden

$$|a| = \begin{cases} a & \text{ha } a > 0 \\ 0 & \text{ha } a = 0 \\ -a & \text{ha } a < 0 \end{cases}$$

Megj. ha a számokat számegyenesen ábrázoljuk akkor egy szám abszolutértéke tulajdonképpen a nulla ponttól távolságával egyenlő meg.

② Az egyenlőtlenségekkel való számolás néhány axiómája:

I. Ha $a > b$ és c bármilyen szám, akkor:
$a + c > b + c$

II. Ha $a > b$ és $c > 0$ akkor:
$ac > bc$

III. Ha $a > b$ és $c < 0$ akkor:
$ac < bc$

/tehát a negatív számmal való szorzás megfordítja az egyenlőtlenséget, az egyenlőséget nem rontaná el!/

③ Tételek:

1. Tétel: $|a + b| \leq |a| + |b|$

Biz: ha a és b azonos előjelűek akkor triviálisan az egyenlőséggel áll fenn
ha különböző előjelűek akkor az $|a + b|$ értéke csökken így az egyenlőtlenségi jel lesz érvényes.

Megjegyzés: tételünk akkor is érvényes, ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ komplex számok
ekkor „háromszög egyenlőtlenségnek" nevezik

2. Tétel: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$; $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Bizonyítás: világos!

Sorozatok, nullsorozatok

Def. Ha az $1;2;3.....n$ természetes számok valamennyiéhez egyértelműen hozzárendelünk számokat, úgy egy **számsorozatot** kapunk

pl. $a_1 = 1$; $a_2 = \frac{1}{2}$ ..... vagy pl $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$

Def. Egy sorozatot **nullsorozatnak** nevezünk ha a ϕ (zéró) ϱ sugarú környezetén kívül a sorozatnak csak véges számú eleme van (míg belül végtelen sok)
/a ϕ ϱ sugarú környezetén a $-\varrho$ $+\varrho$ számközt értjük/

Hogy az a_n sorozat **nullsorozat** ezt úgy is kifejezhetjük, hogy a_n a ϕ-hoz konvergál(tart) és így jelöljük: $a_n \to \phi$ vagy:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \phi$$

pl. a sorozat: $a_n = \frac{1}{n}$ és a $\varrho = \frac{1}{p}$

Legyen N olyan egész szám, hogy $N > p$ ekkor

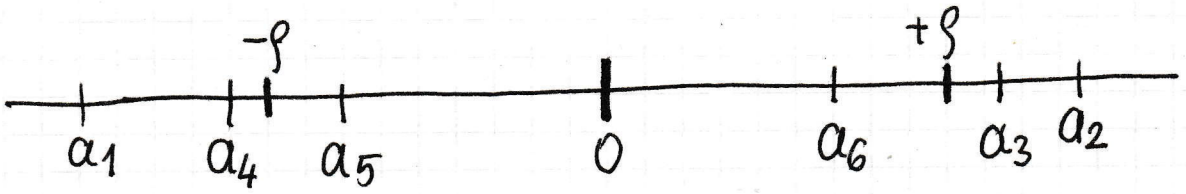
$\frac{1}{N} < \frac{1}{p} = \varrho$, ha tehát $n > N$ akkor

$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varrho$

tehát minden sorozatelem ami p-nél nagyobb sorszámú a ϱ-hól kisebb, és minden az előzőnél nagyobb sorszámú elem az előzőknél közelebb van a nullához.

Tétel: A nullsorozatok kritériumtétele:

Egy sorat ~~csak~~ akkor és csak akkor nullsorozat ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan N küszöbindex, hogyha $n > N$ akkor abszolutérték $a_n < \varepsilon$
/azaz az N-edik sorozatelem még kívül van a ε sugarú környezeten de az (N+1)-edik elem már belül/



Bizonyítás:

1. A feltétel szükségességét bizonyítjuk:
Legyen adva egy ε, mivel a sorozat nullsorozat a ε sugarú környezetén kívül a sorozatnak csak véges számú eleme van, a kimaradó elemek között van egy legnagyobb indexű, legyen ez N, tehát $n > N$ esetén az a_n tag a ε sugarú környezeten belül van, ami éppen azt jelenti, hogy $|a_n| < \varepsilon$

2. Ha a feltétel teljesedik akkor a N-nél nagyobb indexű tagok a ε sugarú környezetén belül vannak /hiszen ekkor abszolut érték $a_n < \varepsilon$/ így kívül legfeljebb N darab sorozatelem van, ami <u>véges.</u>

Műveletek nullsorozatokkal

I. Def. (sorozatok összege)

Legyen adva egy $a_1; a_2; \ldots a_n; \ldots$ valamint egy $b_1; b_2; \ldots b_n; \ldots$ sorozat; a két sorozat összegén a következő sorozatot értjük:

$a_1+b_1;\ a_2+b_2; \ldots a_n+b_n; \ldots$

Tétel:

Ha $a_n \to \emptyset$ és $b_n \to \emptyset$ /nullsorozatok/ akkor e két sorozatból alkotott összegsorozat is nullához tart:

$a_n + b_n \to \emptyset$

Bizonyítás: (kritériumtétel alapján)

Megmutatjuk, hogy egy adott ε-hoz van olyan N küszöbindex, hogyha $n > N$ akkor a_n+b_n abszolut értékben kisebb mint ε.

Mivel $a_n \to \emptyset$ ezért $\frac{\varepsilon}{2}$ höz van olyan N' küszöbindex

ha $n > N'$ akkor $|a_n| < \varepsilon/2$

hasonlóan a b_n sorozat esetén van olyan N'' index hogy $n > N''$ esetén $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

Legyen mostmár $N = \max\{N', N''\}$ /a nagyobbat vettük/ ilyen N esetén, ha $n > N$ $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ és

$|b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

Mivel az egyenlőtlenségek egyidejűleg fennállnak, tehát:

$$|a_n+b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Def. Az a_n sorozat c konstansszorosán a következő sorozatot értjük: $c\cdot a_1; c\cdot a_2; c\cdot a_3 \ldots c\cdot a_n \ldots$.

Tétel: Ha $a_n \to \emptyset$ akkor $c\cdot a_n \to \emptyset$

/a nullsorozat konstansszorosa is nullához tart/

Bizonyítás: (kritériumtétel alapján)

Megmutatjuk, hogy van olyan N küszöbindex, ha

$n > N$ akkor $|c\cdot a_n| < \varepsilon$

$a_n \to \emptyset$ tehát $\frac{\varepsilon}{|c|}$ -hez van olyan N^* küszöbindex, ha

$n > N^*$ akkor $|a_n| < \frac{\varepsilon}{|c|}$

legyen $N = N^*$ ekkor:

$$|c\cdot a_n| = |c|\cdot|a_n| < |c|\cdot\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

Tétel: Összehasonlító kritériumtétel

Ha a_n és b_n sorozatokra teljesednek a következő feltételek:

① $|a_n| \leq |b_n|$

② $b_n \to \emptyset$

} akkor $a_n \to \emptyset$

/ha egy sorozat „a" minden tagja kisebb v. egyenlő abszolút értékű egy „b" nullsorozat minden azonos indexű tagjánál akkor az „a" sorozat is tart a $\emptyset$-hoz/

Bizonyítás:

Legyen megadva ε akkor a b_n sorozathoz van olyan N küszöbindex hogy $n > N$ esetén $|b_n| < \varepsilon$, de az első feltétel alapján abszolútérték $|a_n| < \varepsilon$ hacsak $n > N$

Tehát a b_n sorozathoz talált N az a_n sorozathoz is jó.

Tétel: A nullsorozatok korlátosak

Bizonyítás: vagy maga a ε a korlát, vagy a kívül lévő elemek közül a legnagyobb abszolutértéke / mivel kívül csak véges számú elem van /

Tétel: Ha az a_n sorozat nullsorozat és c_n korlátos sorozat, akkor $a_n \cdot c_n \to \emptyset$

Bizonyítás: $|c_n \cdot a_n| = |c_n| \cdot |a_n| \leqq C \cdot |a_n| = |C \cdot a_n|$

tehát mert $a_n \to \emptyset$ és az összehasonlító kritérium miatt $a_n \cdot c_n \to \emptyset$

/ mivel minden egyes eleme a $c_n \cdot a_n$ sorozatnak kisebb egy nullsorozat $C \cdot a_n$ azzal azonos sorszámú eleménél, ahol C a c_n sorozat legnagyobb eleme /

Konvergens és divergens sorozatok

A nullsorozatok a nullához konvergáló/tartó/ sorozatok, természetesen egy konvergens sorozat tarthat egy a nullától különböző ξ számhoz is. Ekkor az eddigiek érvényesek maradnak, csak a ε sugarú környezet értelemszerűen a ξ számtól van kijelölve!

Def. Akkor mondjuk, hogy egy a_n sorozat ξ-hez konvergál ha ξ tetszőleges ε sugarú környezetén kívül a sorozatnak csak véges számú eleme van.

Jelölése: $a_n \to \xi$ vagy $\lim a_n = \xi$

Megjegyzés: a definíció értelmében „majdnem minden n-re" / véges számú kivétellel /

$$\xi - \varepsilon < a_n < \xi + \varepsilon$$

Tétel: Az a_n sorozat akkor és csak akkor konvergál a ξ-hez, ha az $a_n - \xi$ sorozat $\to \emptyset$

Megjegyzés: így a sorozat minden a nulla felé toltuk el, ezért természetesen mostmár a nullához kell konvergálniuk

Bizonyítás:

I. Bebizonyítjuk, hogy ha $a_n \to \xi$ akkor $a_n - \xi \to \emptyset$

$a_n \to \xi$ azt jelenti, hogy véges kivétellel:

$$\xi - \varrho < a_n < \xi + \varrho \quad \text{azaz}$$

$$-\varrho < a_n - \xi < \varrho \quad \text{vagyis}$$

$$|a_n - \xi| < \varrho$$

de ez éppen azt jelenti, hogy $a_n - \xi \to \emptyset$

II. az előző levezetést alkalmazva visszafelé, minden lépést megfordítva végezve az $a_n - \xi \to \emptyset$ feltételből az $a_n \to \xi$ -t kapjuk.

Tétel: Ha $a_n \to \xi$ és $b_n \to \eta$ akkor

1. $a_n + b_n \to \xi + \eta$
2. $a_n \cdot b_n \to \xi \cdot \eta$
3. $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{\xi}{\eta}$ ha η nem $\emptyset$ és b_n nem $\emptyset$

Def. Az a_n sorozatot akkor nevezzük *határozottan divergensnek*, ha tetszőleges nagy K esetén a_n csak véges sok tagra $< K$, és ekkor $+\infty$-hez tart.

Def. Ha egy sorozat nem konvergens és nem is határozottan divergens akkor a sorozatot *oszcillálló sorozatnak* nevezzük

Függvények

Definíció:

Ha az „A" halmaz minden eleméhez hozzárendeljük a „B" halmaz egy és csakis egy elemét, akkor azt mondjuk függvénykapcsolatot értelmeztünk

/a „B" halmaz minden eleméhez tartozik „A" halmaz beli elem, de a „B" halmaz egy eleme több „A" halmaz beli elemhez is tartozhat/ pl. egy sin x függvény újra és újra felveszi mondjuk az „1" függvényértéket/

Az „A" halmazt a függvény értelmezési tartományának a „B" halmazt a függvény értékkészletének nevezzük.

Leképezések:

Az „A" halmaz minden eleméhez hozzárendeljük a „B" halmaz egy elemét, akkor azt mondjuk, hogy

„A" halmazt leképeztük a „B" halmazba, ha a „B" nem minden eleme lép fel kép gyanánt

vagy „A" halmazt leképeztük a „B" halmazra, ha a „B" minden eleme fellép kép gyanánt.

Egyértelmű leképezés:

Ha az „A" halmaz mindeneleméhez csak egy „B" halmaz beli elem tartozik a leképezést egyértelműnek nevezzük

/pl ilyenek azok a függvények ahol a görbe nem fordul vissza önmaga felé/ ezeket magamban „jó" függvénynek nevezem/

Fordított leképezés:

Ha a „B" halmaz elemeihez hozzárendeljük „A" azon elemeit amelyeknek előzőleg képeik voltak – fordított leképezést értelmeztünk

Kölcsönösen egyértelmű leképezés:

Akkor mondjuk, hogy az „A" halmaz kölcsönösen egyértelműen van leképezve a „B" halmazra, ha

1. a leképezés egyértelmű
2. a „B"-re történik
3. a fordított leképezés is egyértelmű

A függvény néhány megadási módja:

Matematikai képlettel /jelölése: $y = f(x)$/
Grafikonnal
Táblázattal

A függvények tulajdonságai és fajtái

Monotonitás

Ha az $y = f(x)$ függvény monoton növekedő, akkor

$x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leqq f(x_2)$

és szigorúan monoton növekedő amikor:

$x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$

monoton csökkenő, ha a függvényérték rendre kisebb egyenlő, monoton esetben csak kisebb: azaz $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \geqq f(x_2)$, és monoton ha $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$.

A függvény ábrázolása:

A derékszögű koordinátarendszerben az $y=f(x)$ kapcsolatot úgy ábrázolhatjuk, hogy az x-et az abcissza tengelyen az y-t az ordináta tengelyen ábrázolva pontokat kapunk, melyek összessége adja a görbét.

/ egy x_1 értékhez a függvénykapcsolat (képlet) által meghatározható y_1 érték tartozik – ez a számpár adja a görbe egy pontjának koordinátáit: $(x_1; y_1)$ /

A Racionális függvény definíciója:

Azt a függvényt, amelyben az x változó bizonyos konstansokkal és az ezekre véges sokszor alkalmazott négy alapművelettel van leírva

racionális függvénynek nevezzük

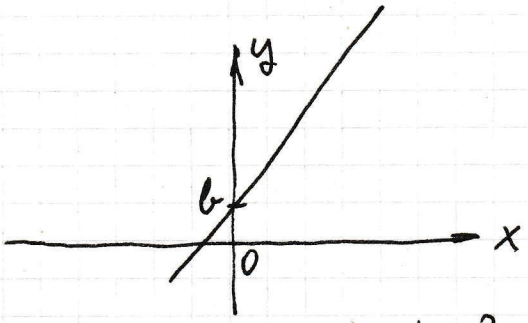
A racionális függvény általános alakja:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} \dots + a_n}{a_0x^p + a_1x^{p-1} \dots + a_p}$$

ha változóval való osztás nem szerepelne akkor racionális egész kifejezésről beszélünk.

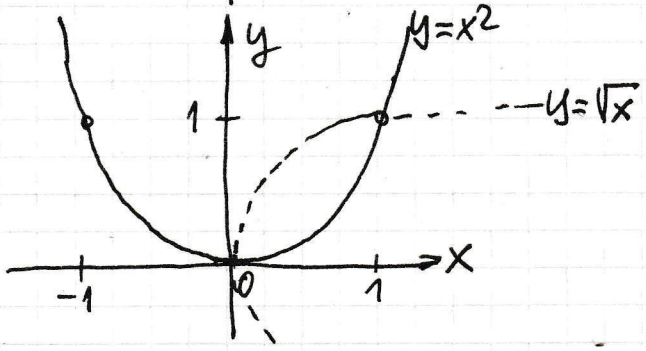
Elemi függvények:

Az egyenes: $y = mx + b$

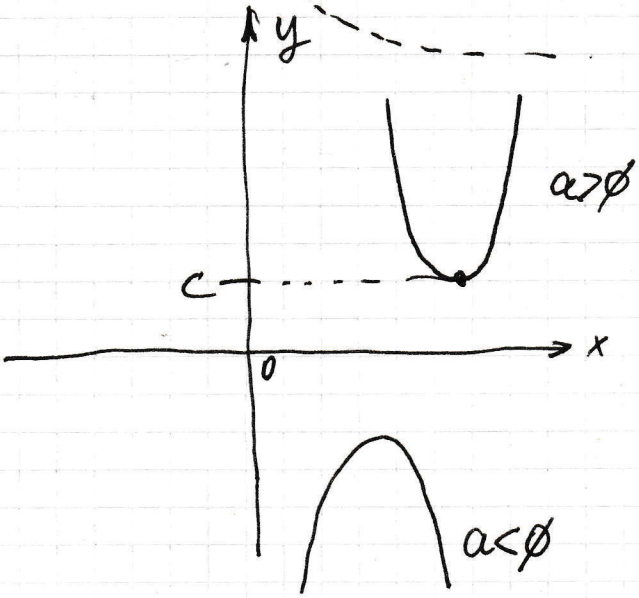


A parabola: $y = x^2$

$y = \sqrt{x}$

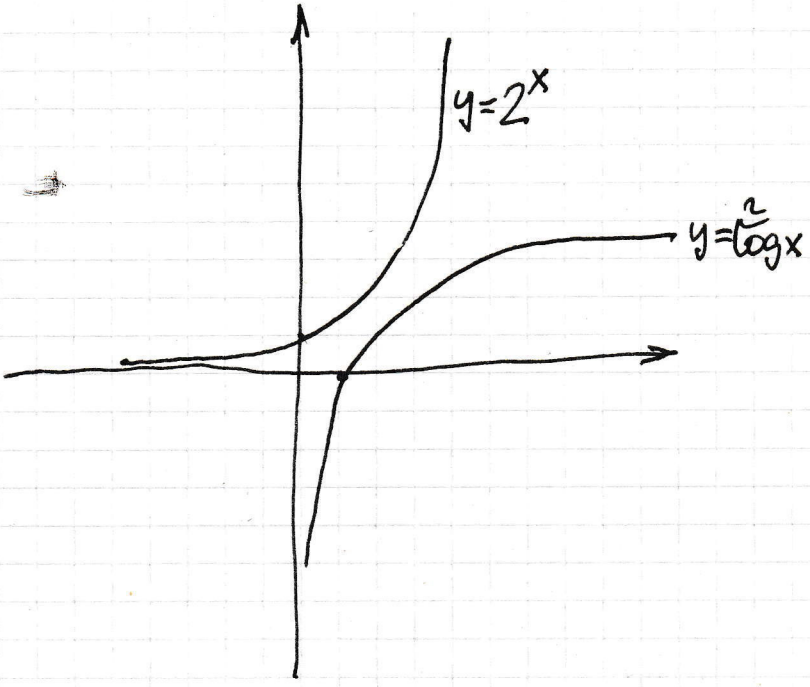


$y = ax^2 + bx + c$



$y = 2^x$

$y = \log_2 x$

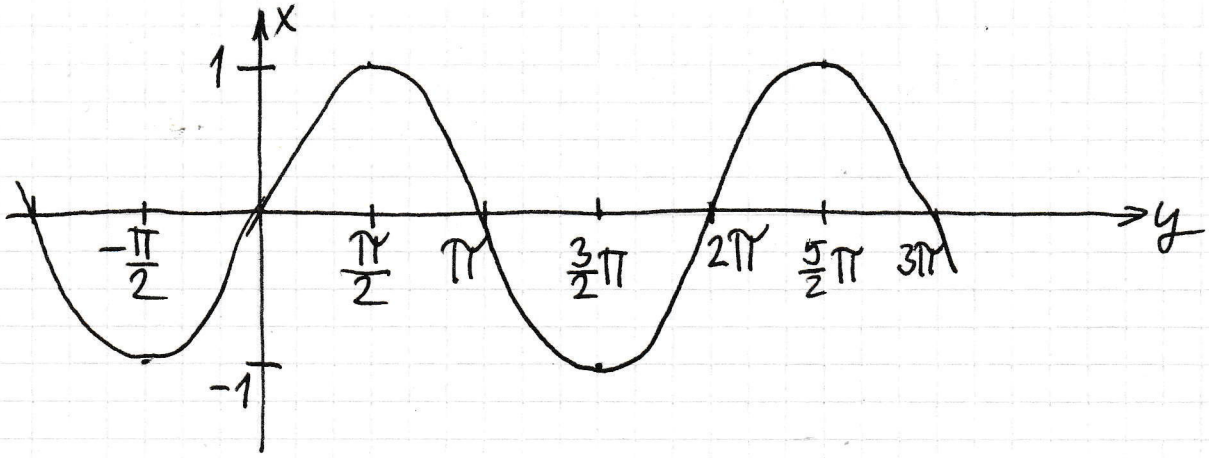


Trigonometrikus függvények

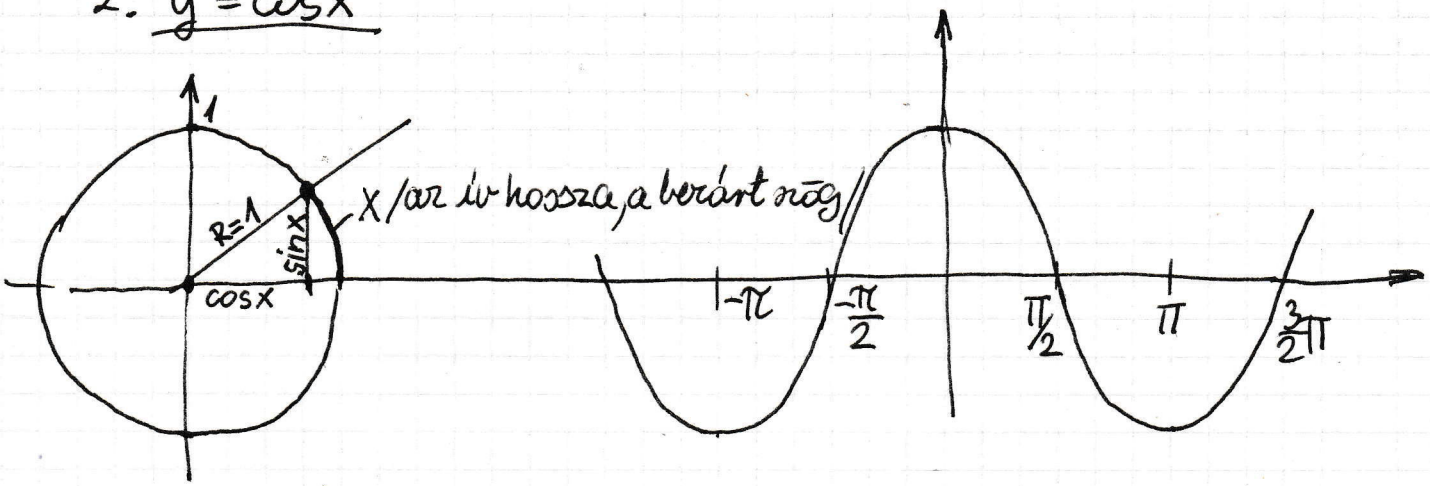
1. $y = \sin x$

periódikus függvény, a Periódus $= 2\pi$ ezért $\sin(x+2\pi) = \sin x$

páratlan függvény azaz $\sin(-x) = -\sin x$



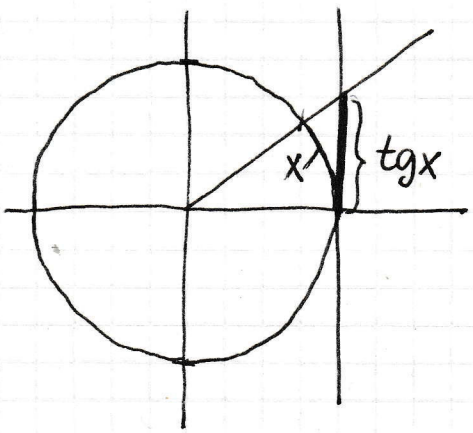
2. $y = \cos x$

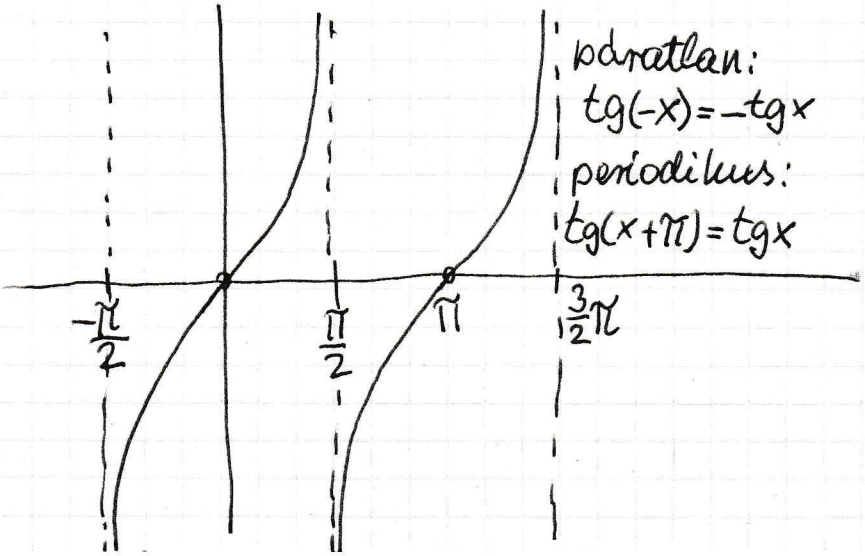


periódikus függvény $\cos(x+2\pi) = \cos x$

páros függvény $\cos(-x) = \cos x$

3. $y = tgx$





$y = \operatorname{ctg} x$

$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$ páratlan függvény

$\operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg} x$ periódikus (periódus $= \pi$)

Függvény határértéke

Def. Legyen értelmezve az $f(x)$ függvény az ab intervallum fölött. Legyen x_0 ezen intervallum egy belső pontja.

Alkossunk meg egy $x_n \to x_0$ sorozatot!

Ezen x_n sorozathoz tartozik egy $f(x_n)$ függvényérték sorozat.

Ha tetszőleges $x_n \to x_0$ sorozat esetén a hozzátartozó $f(x_n)$ sorozat konvergens, akkor azt mondjuk, hogy a függvénynek az x_0 pontban van határértéke, és ez nem más mint a függvényértéksorozatok közös határértéke.

jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Megjegyzés: 1. A határérték létezése pontbeli tulajdonság

2. A függvény határértéke megegyezhet a függvényértékkel de ez nem mindig áll fenn

Tétel: A határérték unicitásának tétele

Ha tetszőleges $x_n \to x_0$ $(x_n \neq x_0)$ esetén $f(x_n)$ konvergens akkor csak egy A számhoz tarthatnak / $f(x_n) \to A$ /

Bizonyítás: /indirekt módon/

Tegyük fel, hogy a tételünk nem igaz $f(x_n) \to A$ és $f(\bar{x}) \to B$

alkossuk meg a következő x_n^* sorozatot

$x_1^* = x_1$; $x_2^* = \bar{x}_1$; $x_3^* = x_2$; $x_4^* = \bar{x}_2$

ezzel szuperponáltuk az x_n és az $\bar{x}_n$ sorozatot, ezzel kimutattuk, hogy az $f(x_n^*)$ nem konvergens mert egyrészt A-hoz másrészt a B-hez tart /pedig $x_n^* \to x_0$ /

Tétel: A két függvényösszegnek határértéke az x_0 pontban megegyezik a külön külön kiszámított határértékek összegével

Legyen $\lim_{x\to x_0} f(x)$ és $\lim_{x\to x_0} g(x)$ értelmezve, akkor létezik az $f(x)+g(x)$ határértéke az x_0 pontban és

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

más jelöléssel: $F(x) \equiv f(x)+g(x)$

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty}[f(x_n)+g(x_n)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Tétel: $\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$

Megjegyzés: A racionális műveletek és a lim operáció felcserélhetőek!

Példák: $f(x)=x$; $x_n \to x_0$ akkor $f(x_n)=x_n$ és $f(x_n)\to x_0$

$f(x_0)=x_0$

$f(x)=x^2$ $\qquad$ $\lim_{x\to x_0} f(x) = x_0^2$

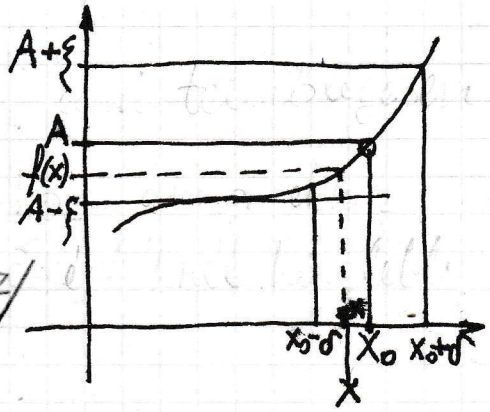
Polinom határértéke: az x_0 pontban a pontbeli polinomértékkel egyezik meg.

A függvény határértékének kritériumtétele

Tétel: Az $f(x)$ függvénynek akkor és csak akkor határértéke az x_0-ban a A érték, ha tetszőleges ε /$\varepsilon>0$/-hoz megadható olyan δ /$\delta>0$/, hogy $|f(x)-A|<\varepsilon$ hacsak $0<|x-x_0|<\delta$

/azaz van olyan $f(x)$ függvényérték ami tetszőlegesen közel van a határértékhez, A-hoz akkor ehhez tartozik olyan δ, hogy az x is a δ értéknél közelebb kerül az x_0-hoz/

$|f(x)-A|<\varepsilon$, $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$, $x_0-\delta<x<x_0+\delta$



Bizonyítás: /elegendőség/ ha a feltétel igaz .. akkor a határérték A

Legyen adva egy ε, ehhez a feltétel értelmében van olyan δ, hogyha $|x-x_0|<\delta$ akkor $|f(x)-A|<\varepsilon$

Legyen x_n olyan $x_n \to x_0$, az előbb kapott δ-hoz van olyan N küszöbindex hogyha $n>N$ akkor $|x_n-x_0|<\delta$ de ekkor $|f(x_n)-A|<\varepsilon$, ez azt jelenti, hogy $f(x_n)\to A$ azaz az x_0 pontbeli határértéke A.

/szükségesség/

Tegyük fel, hogy x_0-ban a határérték létezik definíció szerint és ez A, de a feltétel nem teljesedik:

van olyan ε^* /legalább egy/ amelyhez akárhogyan adunk meg egy δ-t mindig van egy olyan x pont, hogy bár $|x-x_0|<\delta$, mégis $|f(x)-A| \geqq \varepsilon^*$

Az ε^*-hoz a δ_1 nem jó, így van olyan x_1, hogy $|x_1-x_0|<\delta_1$ de $|f(x_1)-A|\geqq\varepsilon^*$.

Legyen δ_n olyan, hogy $\delta_n \to 0$

Az ε^*-hoz a $\delta_1, \delta_3 \ldots \delta_n$ sem jó, tehát vannak olyan

$x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ értékek, hogy bár $|x_n - x_0| < \delta_n$ mégis $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon^*$

Mivel $\delta_n \to 0$ azért nyilvan $x_n \to x_0$ és ezen x_n-ekre: $f(x_n) \geq |A + \varepsilon^*$ vagy $f(x_n) \leq A - \varepsilon^*$

Tehát az A ε^* sugarú környezetén kívül az $f(x_n)$ függvényértéksorozatnak végtelen sok eleme van, és így $f(x_n)$ nem konvergálhat a A értékhez, ami ellentmondásos arral, hogy a függvénynek x_0 pontban A a határértéke. / hiszen $x_n \to x_0$ /

Bal és jobboldali határérték

Definíció: Ha az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának x_0 pontjához tetszőlegesen balról konvergáló: $x_n \to x_0$ /$x_n < x_0$/ sorozat esetén $f(x_n)$ mindig konvergens akkor x_0-ban van baloldali határérték.

Jelölés: $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$, a jobboldali hasonlóan

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = B$$

Tétel: Ha valamely x_0 pontban léterik a bal és jobboldali határérték és ezek megegyeznek, akkor léterik az általános értelemben vett határérték is és ez egyenlő ezzel a közös értékkel.

Bizonyítás: Egy tetszőleges $x_n \to x_0$ sorozat felbontható egy balról és jobbról konvergáló sorozatra, mivel ezen részsorozatokhoz tartozó fv. sorozatok ugyanoda konvergálnak, ezek szuperpozíciójából létrejövő fv. sorozat is ugyanahhoz az értékhez konvergál.

Folytonos függvények

Definíció: Ha valamely $f(x)$ függvény x_0 pontbeli határértéke megegyezik az x_0 pontban vett függvényértékkel, akkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ x_0-ban folytonos.
A folytonosság pontbeli tulajdonság!

Definíció: Ha x_0-ban baloldali határérték létezik és ez megegyezik a függvényértékkel akkor azt mondjuk, hogy balról folytonos. / jobboldali hasonlóan /

Definíció: Az $f(x)$ függvényről akkor mondjuk, hogy az ab zárt intervallumban folytonos, ha a belső pontokban folytonos a végpontokban pedig egyoldalról folytonos.

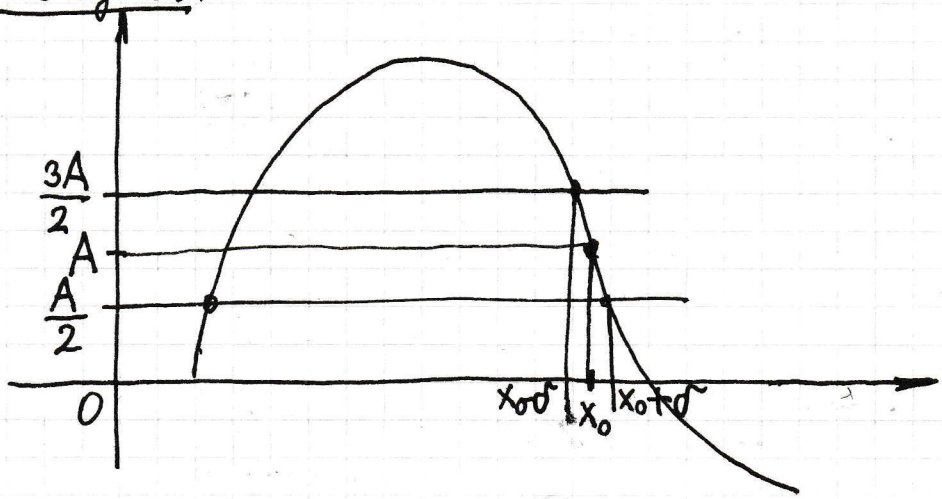
Folytonos függvényekre vonatkozó nevezetes tételek

Tétel: I. Zárt intervallumban folytonos függvény ott egyenletesen folytonos, azaz tetszőleges ε-hoz megadható olyan x_0-tól független δ hogy $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, hacsak $|x-x_0|<\delta$ ahol x_0 az intervallum tetszőleges pontja / Cantor tétel /
/ gondolom, hogy egy ε-hoz a tartományon belül x_0-at változtatva különböző δ értékek felelnek meg, a legnagyobbat kiválasztva lesz x_0-tól független mindenütt jó (amíg a függvény nem "vízszintes v. függőleges" addig működik) /

Tétel: II. Az x_0 pontban folytonos függvény **feltartó** arar, ha $f(x_0)>\emptyset$ akkor x_0-nak van olyan környezete amelyből vett x-ekre $f(x)$ is pozitív

/nullától különböző fv határérték környezete is azonos: pozitív v. neg./

Bizonyítás:



legyen $f(x_0)=A>\emptyset$, mivel a függvény x_0-ban folytonos azért $\varepsilon=\frac{A}{2}$-höz megadható olyan δ ha $x-x_0<\delta$ akkor $|f(x)-A|<\frac{A}{2}$ arar $A-\frac{A}{2}<f(x)<A+\frac{A}{2}$

mivel $A>\emptyset$ azért ilyen x-re $f(x)>\frac{A}{2}>\emptyset$

Tétel III. /Bolzano/

Az ab zárt intervallumban folytonos függvény minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső értéket felvesz az intervallum valamely x_0 pontjában.

Tétel IV. Ha az $f(x)$ függvény folytonos és inverze létezik akkor az is folytonos

A differenciálhányados

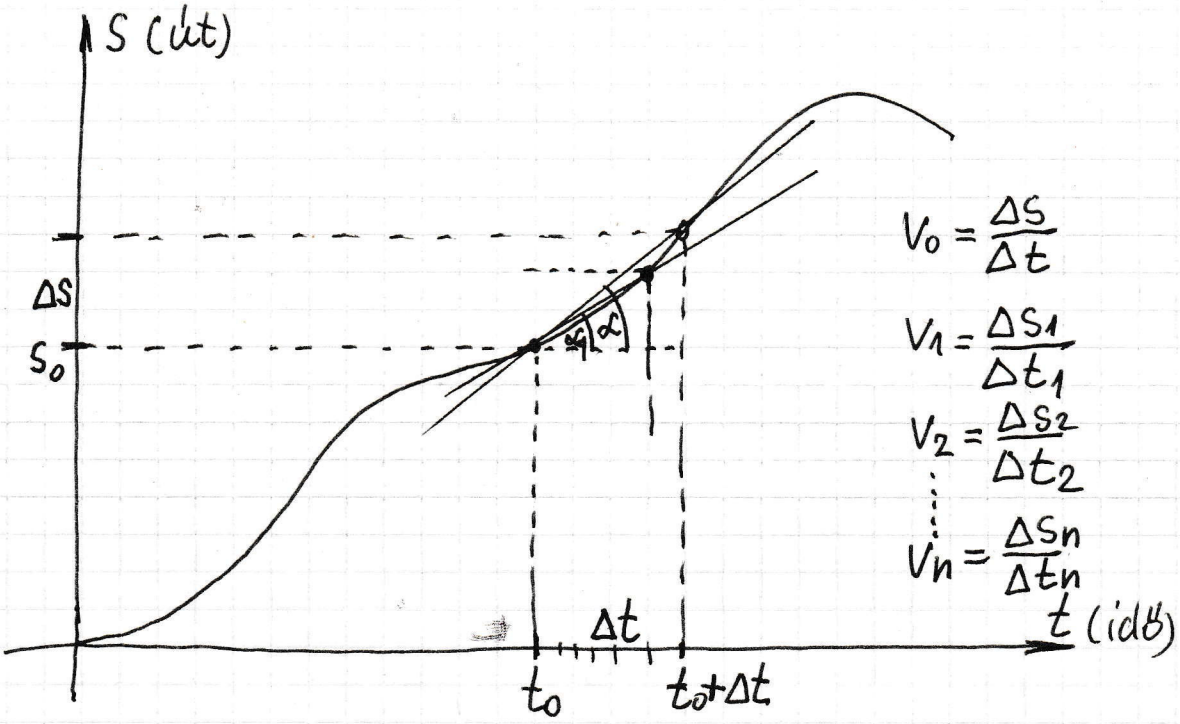
Az út-idő függvény és a sebesség: /példa a differenciálhányados gyakorlati felhasználására/

út = f(idő) rövidebb jelöléssel:

$s = f(t)$

Ha a pillanatnyi sebességet akarjuk megkapni egy t_0 időpillanatban - természetesen a t_0 közelében egy kis Δt idő alatt megtett utat a Δs-t kell meghatározni, majd képezni $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ hányadost ami a t_0 pillanatban a sebességet adja.

Annál pontosabb a kapott érték minél kisebb Δt idő alatt megtett úttal számolunk.

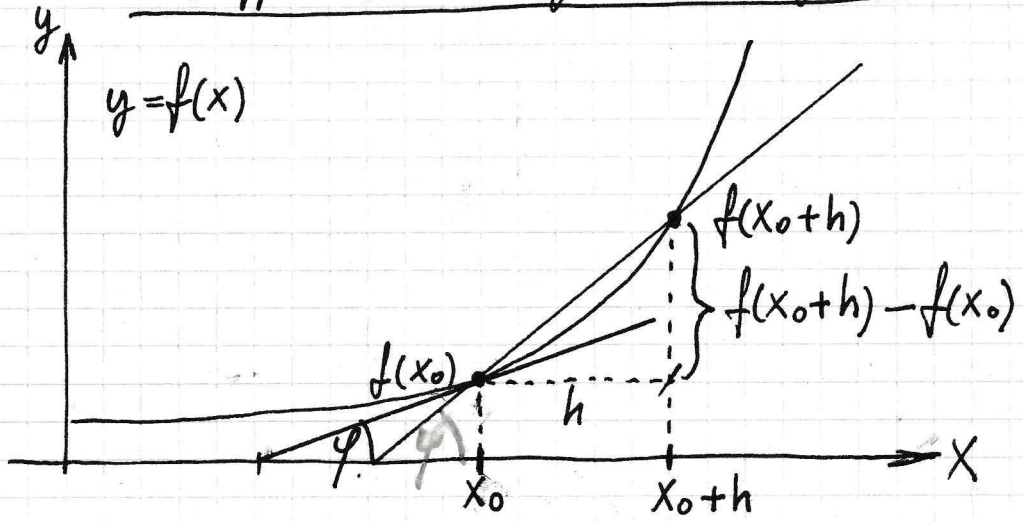


Ha a Δt értékét minden határon túl csökkentjük:

$$v = \lim_{\Delta t_n \to 0} \frac{\Delta s_n}{\Delta t_n}$$ a pontos sebességet kapjuk, az egyenes érintője lesz a függvénygörbének, a sebesség pedig az α szög tangense lesz. A sebesség tehát az út-idő függvény differenciálhányadosa: $v = \frac{ds}{dt}$ $(= \operatorname{tg}\alpha)$

Azaz a görbe érintőjének iránytangense /$y = mx + b$/

A differenciálhányados meghatározása/definiálása



$$\Phi(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad h_n \to 0 \text{ /képezzük a } h_n \text{ nullsorozatot/}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \lim_{h\to 0} \Phi(h) = \lim_{h_n\to 0} \Phi(h_n) \text{ /ez nem más mint a } \Phi(h) \text{ függvény határértéke!/}$$

$h_1, h_2, h_3 \ldots h_n$ nullsorozat

$$\Phi(h_1) = \frac{f(x_0+h_1)-f(x_0)}{h_1}$$

$$\Phi(h_2) = \frac{f(x_0+h_2)-f(x_0)}{h_2}$$

$$\vdots$$

$$\Phi(h_n) = \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} \text{ azaz, ha } h_n \text{ sorozat } 0\text{-hoz tart:}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \lim_{h_n\to 0} \Phi(h_n) = \lim_{h_n\to 0} \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}$$

Def: Legyen adva egy $f(x)$ függvény értelmezési tartományának valamely x_0 pontjában függvényérték $f(x_0)$. Legyen h egy változó akkor a $\Phi(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ függvényt, amely rögzített x_0 mellett a h-nak a függvénye **differenciahányadosnak** nevezzük.

Ha a $\lim_{h\to 0} \Phi(h)$ létezik, akkor az $f(x)$ függvény x_0 pontban differenciálható, és ezt a **határértéket** nevezzük az $f(x)$ függvény x_0 pontbeli differenciahányadosának!

Magyarázat:
A határérték definíciójára emlékezve a differenciahányados az $\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}$ /ahol h_n tetszőleges nullsorozat/ határértékeként is kapható/ez éppen a $\Phi(h)$ fv. értéksorozata

Megjegyzés: A differenciálhányados geometriailag az érintő iránytangense/ha értéke ∞ akkor az érintő párhuzamos az x tengellyel így az $f(x)$ függvénynek maximuma vagy minimuma van abban az x_0 pontban/

Megjegyzés:
A fizikában nagy jelentősége van a differenciálhányados fogalmának. Ha adva van az út mint az idő függvénye akkor valamely t_0 pillanatban a sebességen az út=f(idő) függvény t_0/pillanatban/ pontban vett differenciál-hányadosát értjük.
A fizikában az idő szerinti differenciálást a függvény fölé tett ponttal jelöljük.

Jelölése: Az $f(x)$ függvény x_0 pontbeli differenciálhányadosát $f'(x_0)$ /Leibniz/ vagy $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$ -val /Newton/ jelöljük.

Def: Ha egy intervallum minden egyes pontjához hozzárendeljük az $f(x)$ differenciálhányadosát /ha létezik/ akkor egy újabb függvényt kapunk és $f'(x)$ -el jelöljük.
A differenciálást deriválásnak, a differenciálhányadost deriváltnak is nevezik /főleg az algebristák/

Alapfüggvények differenciálhányadosának kiszámítása

1. $y = x^n$ / n pozitív egész/

$$\Phi(h) = \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} = \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{(x_0+h) - x_0} = (x_0+h)^{n-1} + (x_0+h)^{n-2}\cdot x_0 + \dots$$

$$\dots + (x_0+h)\,x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \qquad \text{mert } a = x_0+h;\ b = x_0$$

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}\cdot b + a^{n-3}\cdot b^2 + \dots + a\cdot b^{n-2} + b^{n-1}$$

$$\lim_{h\to 0}\Phi(h) = \lim_{h\to 0}(x_0+h)^{n-1} + \dots + \lim_{h\to 0} x_0^{n-1} =$$

$$= x_0^{n-1} + x_0^{n-2}\cdot x_0 + \dots + x_0\cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1} = \underline{\underline{n\cdot x_0^{n-1}}}$$

$y = x^n$

$y' = n\cdot x^{n-1}$ mert $(x_0^n)' = n\,x_0^{n-1}$

azaz ha $y = x \quad y' = 1$

$y = x^2 \quad y' = 2x$

$y = x^3 \quad y' = 3x^2$

2. $y = a\cdot x^n$

$$\Phi(h) = \frac{a(x_0+h)^n - a\cdot x_0^n}{h} = a\cdot\frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h}$$

szorzat határértékét tényezők határértékének szorzata adja:

$$\lim_{h\to 0}\Phi(h) = \lim_{h\to 0} a \cdot \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} = \underline{\underline{a\cdot n x^{n-1}}}$$

pl: $y = 5x^3 \quad y' = 5\cdot 3x^2 = 15x^2$

3. Összegfüggvény differenciálhányadosa

Tétel: Az összegfüggvény differenciálhányadosa egyenlő a tagok differenciálhányadosainak összegével, tehát

$F(x) \equiv f(x) + g(x)$ ar x_0-ban $F'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

számítsuk ki a $F'(x_0)$-at

Induljunk ki a differenciálhányadosának értelmezéséből

$$F'(x_0) = \lim_{h\to\varnothing} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to\varnothing} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to\varnothing} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \right] =$$

$$= \lim_{h\to\varnothing} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h\to\varnothing} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} =$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0)$$

4. Szorzat differenciálása

Ha $f(x) \equiv u(x) \cdot v(x)$ akkor

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$ /röviden $(uv)' = u'v + v'u$/

$$\lim_{h\to\varnothing} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to\varnothing} \frac{u(x_0+h)\cdot v(x_0+h) - u(x_0)\cdot v(x_0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to\varnothing} \frac{u(x_0+h)\cdot v(x_0+h) - u(x_0)v(x_0+h) + u(x_0)v(x_0+h) - u(x_0)\cdot v(x_0)}{h}$$

/$u(x_0)\cdot v(x_0+h)$ $\pm$/

$$\lim_{h\to\varnothing} \frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h} \cdot v(x_0+h) + \lim_{h\to\varnothing} u(x_0) \cdot \frac{v(x_0+h) - v(x_0)}{h}$$ tehát

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$[u(x_0)\cdot v(x_0)]' = u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0)$$

5. Trigonometrikus függvények

a) $y = \sin x$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\sin(\gamma+\delta) = \sin\gamma\cdot\cos\delta + \cos\gamma\cdot\sin\delta \qquad \gamma+\delta=\alpha$$

$$\sin(\gamma-\delta) = \sin\gamma\cdot\cos\delta - \cos\gamma\cdot\sin\delta \qquad \gamma-\delta=\beta$$

$$2\gamma = \alpha+\beta$$

$$\sin(\gamma+\delta) - \sin(\gamma-\delta) = 2\cdot\cos\gamma\cdot\sin\delta \qquad \gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \delta = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\lim_{h\to\emptyset}\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} = \lim_{h\to\emptyset}\frac{1}{h}\cdot 2\cdot\sin\frac{h}{2}\cdot\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right) =$$

$$\alpha = x_0+h \qquad \alpha+\beta = 2x_0+h$$

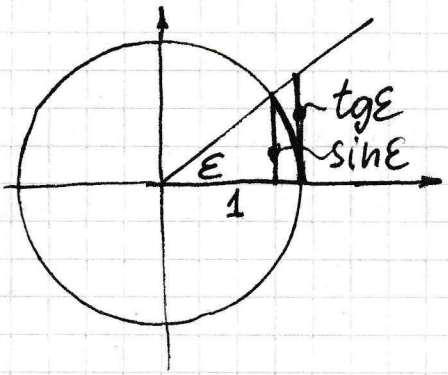
$$\beta = x_0 \qquad \alpha-\beta = h$$

$$\lim_{h\to\emptyset}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to\emptyset}\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right) = \underline{\underline{\cos x_0}}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

Megjegyzés:

$$\lim_{\varepsilon\to\emptyset}\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} = 1$$



$$\frac{1\cdot\sin\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon\cdot 1}{2} < \frac{\operatorname{tg}\varepsilon\cdot 1}{2}$$

$$\sin\varepsilon < \varepsilon < \operatorname{tg}\varepsilon \qquad /\ \frac{\pi}{2} > \varepsilon > \emptyset,\ \varepsilon \text{ az ív hossza a } \sin\varepsilon \text{ és a } \operatorname{tg}\varepsilon \text{ között van!}$$

$$1 < \frac{\varepsilon}{\sin\varepsilon} < \frac{1}{\cos\varepsilon}$$

$$1 > \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} > \cos\varepsilon$$

$$1 \geq \lim_{\varepsilon\to\emptyset}\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} \geq \lim_{\varepsilon\to\emptyset}\cos\varepsilon = \cos\emptyset \equiv 1$$

Példa:

$u(x)=x \quad v(x)=\sin x$

$(x\cdot\sin x)' = (x)'\sin x + x\cdot(\sin x)' = 1\cdot\sin x + x\cdot\cos x$

b) $\cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$

Összetett függvény differenciálhányadosa

Tétel: Az $y=f(\varphi(x))$ függvény amely az $y=f(u)$ és a $y=\varphi(x)$ függvényekből összetett függvény differenciálhányadosát úgy számíthatjuk ki az x_0 pontban, hogy kiszámítjuk az $y=f(u)$ függvény differenciálhányadosát az $u_0=\varphi(x_0)$ pontban és ezt megszorozzuk φ'-vel azaz a $\varphi(x)$ függvénynek az x_0 helyen vett differenciálhányadosával

$$y' = f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0)$$

vagy más jelöléssel: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

/Newton Leibnitz láncszabály; egyszerűen: a külső függvény szerinti deriváltat szorozzuk a belső függvény deriváltjával/

példa: $y=\sin 3x \qquad y=\sin u \qquad u=3x$

$y' = (\sin u)'\cdot u' = \cos u\cdot 3 = 3\cdot\cos 3x$

Bizonyítás: /összetett függvény deriválási szabály/

Írjuk fel a differenciálhányadost másformában:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$y'=\lim_{x\to x_0}\frac{f(\varphi(x))-f(\varphi(x_0))}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(u)-f(u_0)}{x-x_0}=$$

/ ha $x\to x_0$ akkor $\varphi(x)$ folytonossága miatt igaz, hogy $u\to u_0=\varphi(x_0)$ / bővítve a törtet $(u-u_0)$-lal:

$$=\lim_{\substack{x\to x_0\\ u\to u_0}}\left[\frac{f(u)-f(u_0)}{u-u_0}\cdot\frac{u-u_0}{x-x_0}\right]=$$

$$=\lim_{u\to u_0}\frac{f(u)-f(u_0)}{u-u_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0)$$

azaz a külső függvény deriváltját az u_0 helyen szorozzuk a belső függvény x_0 helyen vett deriváltjával:

$$f'(\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0)$$

Definíció: Ha az AB intervallum felett értelmezett $f(x)$ függvény az intervallum minden pontjában differenciálható, akkor az intervallum fölött értelmezhető az $f'(x)$ függvény, ha ezen $f'(x)$ függvény az intervallum valamely belső pontjában ismételten differenciálható

akkor azt mondjuk, hogy az x_0 helyen az $f(x)$ függvény másodrendben deriválható és $f''(x_0)$-lal jelöljük.

Megjegyzés:

Ez az eljárás tovább folytatható és egy n-ed rendű differenciálhányadosról beszélünk.

Tétel:

Az x_0 pontban differenciálható függvény ott folytonos.

Legyen $\varphi(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$$

$$f(x) = \varphi(x)\cdot(x-x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0)$$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ tehát x_0-ban az $f(x)$ folytonos

Hányados differenciálhányadosa

Tétel: Ha az $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ az ab intervallum felett van értelmezve, tehát $v(x)$ sehol sem zérus, valamint u és v differenciálható függvények, akkor $f(x)$ is differenciálható ab bármely pontjában:

és $f'(x) = \dfrac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$.

Bizonyítás:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{u(x_0+h)}{v(x_0+h)} - \dfrac{u(x_0)}{v(x_0)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h)\cdot v(x_0) - v(x_0+h)\cdot u(x_0)}{h\cdot v(x_0+h)\cdot v(x_0)} =$$

$$\lim_{h\to\varnothing}\frac{[u(x_0+h)\cdot v(x_0)-u(x_0)v(x_0)]+[u(x_0)v(x_0)-v(x_0+h)u(x_0)]}{h\cdot v(x_0+h)v(x_0)}=$$

$$=\lim_{h\to\varnothing}\frac{\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}v(x_0)-u(x_0)\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}}{v(x_0+h)v(x_0)}=$$

$$=\frac{u'(x_0)\cdot v(x_0)-v'(x_0)u(x_0)}{v^2(x_0)}=\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}}$$

Például:

$$(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

vagy:

$$(\operatorname{cotg}x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

Inverz függvény differenciálhányadosa

Tétel: Ha az $f(x)$ függvénynek léteri inverze egy x_0 pont környezetében és x_0-ban differenciálható akkor az $x=f^{-1}(y)$ inverz függvénynek is létezik a differenciálhányadosa az x_0-nak megfelelő /$y_0=f(x_0)$/ y_0 pontban és $(f^{-1}(y_0))'=\frac{1}{f'(x_0)}$ /azaz az eredeti fv. deriváltjának reciproka/

Bizonyítás: /az inverz függvény deriváltja/

$$f^{-1\prime}(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \Big/ \begin{matrix} y_0 = f(x_0) \\ f^{-1}(y_0) = x_0 \end{matrix}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \left[f^{-1}(y_0)\right]' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Ciklometrikus függvények differenciálhányadosai

Az $x = \sin y$ inverze $y = \arcsin x$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$x = \operatorname{tg} y$ inverze

$$y' = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

Szélsőérték számítás

I Az abszolut maximum fogalma

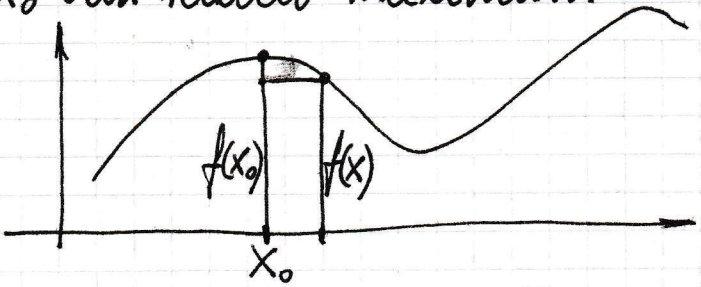
Definíció: Az ab intervallum fölött értelmezett $f(x)$ függvénynek abszolut maximuma van az x_0 pontjában mely ponthoz tartozó függvényérték a legnagyobb, tehát $f(x_0)$ nagyobb mint $f(x)$ ha $x \ni ab$ és nem azonos x_0-lal.

II. A relatív maximum fogalma

Definíció: Az x_0 helyen relatív maximum van ha van olyan δ mely esetén $[x_0-\delta, x_0+\delta]$-ban $f(x_0)$ a legnagyobb függvényérték.
/tágabb értelemben egyenlőség is megengedve/

Tétel: Ha a differenciálható függvény x_0 pontjában relatív szélsőérték van, akkor ott az elsőrendű differenciálhányados nulla.

Bizonyítás:
Legyen x_0-ban relatív maximum



Tekintsük azt az $[x_0-\delta \; x_0+\delta]$ amelyben $f(x_0)$ nagyobb mint $f(x)$ $f(x_0) > f(x)$ tekintsük ezen intervallumból $x_0 < x$-eket ekkor $x-x_0$ nagyobb mint $\emptyset$, tehát

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0$$

ha az $x < x_0$ akat választjuk ki $x - x_0 < 0$ és $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ mivel x_0-ban a függvény differenciálható, ezen két differenciálhányadosnak közös határértéke van ami csak úgy lehet hogy ez $\emptyset$.

Definíció: Azokat az x_0 helyeket ahol $f'(x_0)=0$ stacionárius helyeknek nevezzük

Megjegyzés: az érintő irányszöge, azaz a deriváltja az x_0 két-oldalán különböző előjelű akkor x_0-ban nulla értéket vesz fel, így a derivált akkor nulla ha x_0 relatív maximum vagy minimum.

Út a mechanikához

Egy függvény differenciálhányadosát ki tudjuk számítani, /pl: út=f(idő) azaz $s=f(t)$ függvény deriváltja a pillanatnyi sebesség/
gyakran fordított a probléma: a differenciálhányadost ismerjük és keressük a függvényt.

A fizikában azonban még érdekesebb a feladat amikor olyan egyenletet kell megoldani, ahol egy függvény az ismeretlen, de előfordul mellette a differenciálhányadosa is ismeretlenként.

Ezen egyenleteket <u>differenciálegyenleteknek nevezzük.</u>

/pl: az út az idő függvényében, deriváltja a sebesség az idő fv.-ben, valamint a második deriváltja a gyorsulás/

A differenciálegyenletek megoldása nem könnyű feladat és gyakran csak közelítőleg végezhető el.

<u>Lássunk néhány differenciálegyenletet:</u>

$$\frac{dy}{dx} = y \text{ azaz } f'(x) = f(x) \quad / \text{megoldása } y = e^x /$$ vagy

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \text{ azaz } f'(x) + f^2(x) = 0 \quad / \text{megoldása } y = \frac{1}{x} /$$

<u>Egyirányú rezgések:</u>

Ha az anyagi pont térbeli koordinátarendszerünk x tengelye mentén mozog, és a ráható erő is x irányú amit „X"-el jelölünk, akkor helyzetének megadásához elegendő az x koordináta megadása, azaz x-et az idő függvényében kell megadni $X = X(t)$

A sebesség és a gyorsulás a fizikában

A fizikában az $x(t)$ t szerinti első differenciálhányadost $\dot{x}$ -tal jelölik és az a sebesség.
A másodrendű differenciálhányadosa az elmozdulás időfüggvényének az $\ddot{x}$ -tal jelölt függvény és az a gyorsulás

Ezzel a Newton féle II. axioma így írható, ha a mozgó tömegpont tömeg m.

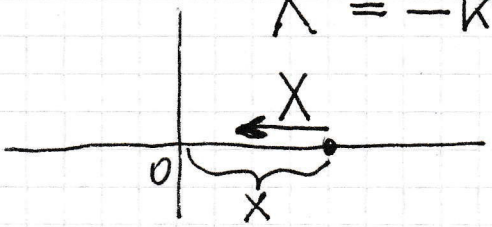
$$X = m\ddot{x}$$ / erő egyenlő tömeg szorozva gyorsulás/

Harmonikus rezgések

Megjegyzés: arra kaphatunk magyarázatot, hogy a minket körülvevő fizikai jelenségek és mozgások miért szinuszhullám szerinti rezgést végeznek: pl egy húr a hangszeren, a hanghullám a levegőben stb.

Hooke törvénye értelmében egy tömegpont akkor végez harmonikus rezgést ha a ráható erő arányos a kitéréssel de ellentétes irányú, vagyis a mi esetünkben

$$X = -k \cdot x \quad / k>0, \text{„}-\text{" mert ellentétes erőirány/}$$



így a Newton féle alapegyenlet

$$-k \cdot x = m\ddot{x}$$

tehát feladatunk olyan függvényt keresni $x = x(t)$ amire teljesedik a fenti differenciálegyenlet.
/látható a függvény és második deriváltja arányosak!/

differenciálegyenletünk ilyen alakba írható

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

mivel a megoldás egy szinuszos rezgőmozgás, ezért feltételezhetően a megoldás,
a mozgás időfüggvénye:
$x = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$ az A, ω, α jellemző állandók

az első deriváltja: /a pillanatnyi sebesség/

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \alpha)$$

a második derivált: /a pillanatnyi gyorsulás/

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{d^2t} = -A \cdot \omega^2 \sin(\omega t + \alpha)$$

A differenciálegyenletbe helyettesítve $\ddot{x}$ és x-et

$$-A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) + \frac{k}{m} \cdot A \cdot \sin(\omega t + \alpha) = 0$$

látható, hogy a megoldás jó, ha: $\omega^2 = \frac{k}{m}$; $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Mivel a sin függvény 2π szerint periódikus, azonos értékeket fog felvenni, ha az argumentuma $(\omega t + \alpha)$ 2π-vel vagy egész többszörösével változik
ehhez a „t" értéke: t; $t + \frac{2\pi}{\omega}$; $t + 2 \cdot \frac{2\pi}{\omega}$; $t + 3\frac{2\pi}{\omega}$ ....
így a $T = \frac{2\pi}{\omega}$ értéket a harmonikus rezgőmozgás rezgés v. periódusidejének nevezzük

$n = \frac{1}{T}$ az időegység alatt végzett rezgések száma: rezgésszám v. frekvencia

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ a körfrekvencia, a 2π idő alatt végzett rezgések száma. $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Az integrálszámítás alapjai

A primitív függvény

Definíció:

Ha az ab intervallumon értelmezett $f(x)$-hez található olyan $F(x)$ függvény, hogy az ab intervallumon

$F'(x) = f(x)$ akkor azt mondjuk hogy a

$F(x)$ az $f(x)$ primitív függvénye, vagy határozatlan integrálja

Jelölés: $F(x) = \int f(x)\,dx$

Megjegyzés: A határozatlan integrál tehát mindig egy függvény, hiszen azt kell deriválni / $F'(x) = f(x)$ /

Alap integrálok: $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad n \neq -1$

Megjegyzés: a „C" konstans bármi lehet mert deriváláskor eltűnik ezért a primitív függvény a C értéke miatt határozatlan.

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\log\cos x + C \qquad \int \operatorname{tg} x\,dx = -\lg|\cos x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int \operatorname{ctg} x\,dx = \lg|\sin x| + C$$

Integrálási szabályok

Összeg integrálása:

I. Tétel: Ha léterik valamely intervallumon $f(x)$ és $g(x)$ integrálja, akkor léterik az $f(x)+g(x)$ integrálja és egyenlő az előbbiek összegével.

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

/tehát külön külön integrálhatóak voltak/

Bizonyítás: mindkét oldalt differenciáljuk!

II. Tétel: konstansal szorzás esete

$$\int c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int f(x)dx$$

$$\int c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots c_n f_n = c_1\int f_1 + c_2\int f_2 + \ldots c_n\int f_n$$

III. Tétel: szorzat integrálása: parciális integrálás

Legyen adva két integrálható függvény $f(x)$ és $g(x)$, legyen $F(x)$ a $f(x)$ primitív függvénye, és tegyük fel hogy $F(x)\cdot g'(x)$ integrálható, akkor

$$\int f(x)\cdot g(x)dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx$$

Bizonyítás: mindkét oldal deriválása:

$$f(x)\cdot g(x) = f(x)\cdot g(x) + \cancel{F(x)\cdot g'(x)} - \cancel{F(x)\cdot g'(x)}$$

IV. Tétel: integrálás helyettesítéssel

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du \Big|_{u=\varphi(x)}$$

Bizonyítás: Úgy bizonyítjuk be, hogy ha mindkét oldalt x szerint deriváljuk azonos függvényeket kapunk

A bal oldal x szerinti deriváltja

$$f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$ /azaz nem integráljuk/

Deriváljuk a jobb oldalt is, az $\int f(u)\,du = F(u)$ jelöléssel így írható:

$F(\varphi(x))$ tehát ennek x szerint deriváltja az összetett függvény deriválási szabálya szerint:

$$\frac{d\,F(\varphi(x))}{dx} = \frac{dF}{du}\Big|_{u=\varphi(x)} \cdot \frac{d\varphi}{dx} =$$

$$= f(u)\Big|_{v=\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$ /tehát a két oldal azonos/

Megjegyzés: a IV. tétel esetében az eredményhez elég a külső függvény primitív függvényét megtalálni és a belsőt változatlanul behelyettesíteni

A határozott integrál

Legyen adva az ab intervallumban korlátos $f(x)$ függvény. Készítsük el az ab intervallum egy σ felosztását:

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots x_{i-1}, x_i, \dots x_n = b$$

az $(x_{i-1}; x_i)$ intervallumot σ_i-vel jelöljük, σ_i jelentse egyúttal ezen intervallum hosszát is.
/tehát $\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n = b - a$/

A σ_i intervallumon az $f(x)$ függvény maximuma M_i, minimuma pedig m_i jelölés kapjon.

A σ beosztáshoz tartozó felső integrál közelítő összeg:

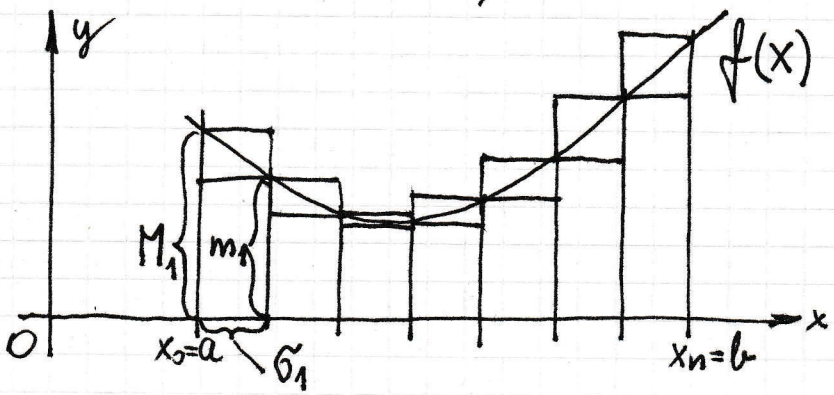
$$\bar{S}_\sigma = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \sigma_i = M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + \dots + M_n\sigma_n$$

A σ beosztáshoz tartozó alsó integrál közelítő összeg:

$$\underline{S}_\sigma = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \sigma_i = m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + \dots + m_n\sigma_n$$

Képezzük az összes lehetséges beosztáshoz tartozó integrál közelítő összeget /felső ill alsó/

A felső integrál közelítő összegek halmazának pontos alsó korlátja legyen $\underline{I}$, míg az alsó integrál közelítő összegek pontos felső korlátja legyen $\bar{I}$. /abból, hogy $f(x)$ korlátos, következik, hogy $\underline{I}$ és $\bar{I}$ léteznek/



Definíció: *az f(x) függvény integrálhatósága*

Ha $J = \bar{J}$ akkor azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény az ab intervallumon Riemann értelmében *integrálható*.

/szemléletes jelentése: a görbe és az x tengely közötti, a görbe alatti terület/

jelölése: $J = \int_a^b f(x)\,dx$

Tétel: A beosztás finomításával az alsó integrál közelítő összegek nem csökkennek, a felső integrál közelítő összegek nem nőnek.

Bizonyítás:

Az $m_i \sigma_i$ intervallumhoz tartozó *járulék*:

Tekintsük a σ_i intervallumot, amelyre finomításkor egy közlenső osztópont kerül, σ_i-t bontja σ_{i1} és σ_{i2}-re /$\sigma_{i1} + \sigma_{i2} = \sigma_i$/ így $m_i \cdot \sigma_i$ helyére $m_{i1}\sigma_{i1} + m_{i2}\sigma_{i2}$ kerül

ahol nyilvan $m_{i1} \geqq m_i$

$m_{i2} \geqq m_i$

tehát $m_{i1}\sigma_{i1} + m_{i2}\sigma_{i2} \geqq m_i\sigma_i = m_i\sigma_{i1} + m_i\sigma_{i2}$

Az új járulék nem kisebb, ha nin osztáspont akkor ott marad tehát az összeg sem csökkenhet.

Megjegyzés: A két beosztás egyesítése/szuperpozíciója/ mindkét beosztás finomultását jelenti

Tétel: Az ab intervallum két tetszőleges beosztása σ_1 és σ_2 akkor $\underline{S}\cdot\sigma_1 \leqq \bar{S}\sigma_2$

Bizonyítás: legyen $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$ /σ a két beosztás egyesítése

$\underline{S}\sigma_1 \leqq \underline{S}\sigma$

$\bar{S}\sigma_2 \geqq \bar{S}\sigma$ $\qquad \underline{S}\sigma \leqq \bar{S}\sigma$

$\underline{S}\sigma_1 \leqq \underline{S}\sigma \leqq \bar{S}\sigma \leqq \bar{S}\sigma_2$ tehát $\underline{S}\sigma_1 \leqq \bar{S}\sigma_2$

Definíció: oszcillációs összeg

A σ beosztáshoz tartozó oszcillációs összegen a következő kifejezést értjük:

$$\Omega_\sigma(f) = \bar{S}_\sigma - \underline{S}_\sigma = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\sigma_i$$

Tétel: az integrálhatóság kritériuma:

Az f függvény akkor és csak akkor integrálható, ha tetszőleges $+\varepsilon$-hoz található olyan σ beosztás, hogy $\Omega_\sigma < \varepsilon$ /az oszcillációs összeg tetszőlegesen kicsivé tehető/

Bizonyítás:

a) Legyen adva egy ε és legyen $\underline{J} = \bar{J} = J$ /integrálható az f/
Mivel J a felső integrál közelítő összegek halmazának pontos alsó korlátja, azért van olyan σ_1 beosztás amelynél $\bar{S}\sigma_1 - J < \frac{\varepsilon}{2}$

hasonlóan adódik, hogy van olyan σ_2 beosztás, hogy

$$J - \underline{S}\sigma_2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Egyesítsük a két beosztást egy σ beosztássá: igazak a következő egyenlőtlenségek: $\bar{S}\sigma - J < \frac{\varepsilon}{2}$

$J - \underline{S}\sigma < \frac{\varepsilon}{2}$ adjuk össze a két egyenlőtlenséget: $\bar{S}\sigma - \underline{S}\sigma < \varepsilon$ ami a bizonyítandó volt.

Bizonyítás: b)

Tegyük fel, hogy Ω_σ tetszőlegesen kicsivé tehető

az állítás hogy $\underline{I} = \bar{I}$

az indirekt feltevés $\underline{I} = \bar{I} + a \quad / a > 0$

amiből az következik:

$$\bar{S}_\sigma \geq \underline{S}_\sigma + a \quad / \text{minden } \sigma$$

legyen $\varepsilon = a$, akkor van olyan σ, hogy

$$\bar{S}_\sigma - \underline{S}_\sigma < a$$

/ tehát az indirekt feltevés nem igaz, mert a-nál kisebbé válik a különbség

Tétel: integrálhatóság

Az ab intervallumon folytonos függvényeknek létezik határozott integrálja.

Tétel: A Newton - Leibnitz formula

Ha az $f(x)$ függvény folytonos és egy tetszőleges primitív függvénye $F(x)$ akkor:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Segédtétel: Az integrálszámítás első középértéktétele

ha $f(x)$ folytonos, akkor igaz a köv. egyenlőség:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi) \quad \text{ahol} \quad a \leq \xi \leq b$$

/ belátható hiszen m és M között minden függvényérték felvan

A Segédtétel bizonyítása:

mivel $m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)dx \leqq M(b-a)$

azért $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$ ahol $m \leqq \mu \leqq M$

/Bolzano tétel szerint $\mu = f(\xi)$/

Bizonyítás: a Newton-Leibnitz formula bizonyítása

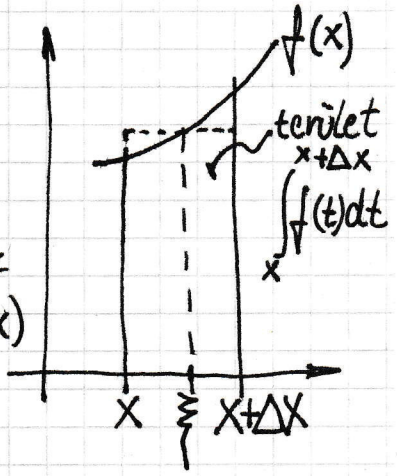
Bizonyítjuk, hogy $\phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ felső határfüggvény/terület fv./

az $f(x)$ primitív függvénye, azaz $\frac{d\phi(x)}{dx} = f(x)$ / $\phi'(x) = f(x)$

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\phi(x+\Delta x) - \phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right]$$

a terület változása osztva Δx-el: a derivált — állandó terület

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \xi \to x}} f(\xi) = f(x)$$



mivel a területet Δx-el osztva $f(x)$-et kapjuk

$\Delta x \to \phi \quad x \leqq \xi \leqq x+\Delta x$ így $\xi \to x$ $f(\xi) \to f(x)$

a felső határfüggvény értéke a b helyen:

$\phi(b) = \int_a^b f(x)dx$, a helyen $\phi(a) = \int_a^a f(x)dx = \phi$ mert nulla a tartomány /a-tól a-ig/

A felső határ/terület/ függvény deriváltja az $f(x)$, de a tényleges területfüggvény tartalmazhat egy „C" konstanst

$F(x) = \phi(x) + C$ de az „a" helyen $F(a) = \phi(a) + C = C$ / $\phi(a) = \phi$

ezért a tartomány alatti terület: /a határozott integrál/

$F(x) - C = \phi(x) \qquad F(a) = C$

$$\int_a^b f(x)dx = \phi(b) = F(b) - C = \underline{F(b) - F(a)}$$